Hoofdstuk 2 - Formules voor groei

bladzijde 34

V-1a $\frac{1020}{1200} = 0{,}85$; $\frac{870}{1020} \approx 0{,}85$; $\frac{740}{870} \approx 0{,}85$; $\frac{630}{740} \approx 0{,}85$, gemiddeld 0,85

b De beginhoeveelheid is 1200 en de groeifactor is ongeveer 0,85. Als A het aantal konijnen is en $t = 0$ in het jaar 2000 geldt: $A = 1200 \cdot 0{,}85^t$

c Plot $\text{Y1} = 1200 \cdot 0{,}85^X$, $\text{Y2} = 200$ Venster: $0 \le \text{X} \le 20$; $0 \le \text{Y} \le 1200$
Intersect: $\text{X} \approx 11{,}02$, dus zijn er voor het eerst minder dan 200 konijnen in 2011.

V-2a $\frac{660}{600} \approx \frac{730}{660} \approx \frac{800}{730} \approx \frac{880}{800} = 1{,}1$ Voor de groeifactor neem je 1,1.
De beginhoeveelheid op $t = 0$ is 600, dus de formule wordt $L = 600 \cdot 1{,}1^t$

b Plot $\text{Y1} = 600 \cdot 1{,}1^X$; $\text{Y2} = 1600$. Venster: $0 \le \text{X} \le 12$; $0 \le \text{Y} \le 2000$.
Intersect: $\text{X} \approx 10{,}3$, dus na 11 jaar zal het aantal leerlingen 1600 bedragen.

bladzijde 35

V-3a Een toename per jaar van 180% betekent een groei van 100% + 180% = 280%.
De groeifactor per jaar van de prijs is dan 2,8. Neem $t = 0$ in 1992, dan is de beginhoeveelheid (in peso's) 1495; De prijs van een poncho is P, dus $P = 1495 \cdot 2{,}8^t$
(t in jaren, P in peso's).

b Plot $Y1 = 1495 \cdot 2{,}8^X$, $\text{Y2} = 200000$. Venster: $0 \le \text{X} \le 10$; $0 \le \text{Y} \le 250000$
Intersect: $\text{X} \approx 4{,}8$, dus in 1997 kostte zo'n poncho 200 000 peso's.

V-4a Toename 0,3% per maand: groeifactor per jaar $1{,}003^{12} \approx 1{,}037$

b Afname 1,8% per kwartaal: groeifactor per jaar $0{,}982^4 \approx 0{,}93$

c Toename 30% per dag: groeifactor per jaar $1{,}3^{365} \approx 3{,}88 \times 10^{41}$

d Afname van 90% per half jaar: groeifactor per jaar: $0{,}1^2 = 0{,}01$

V-5 De groeifactor per jaar voor Peter is 1,0055. Voor An is dat $1{,}0045^{12} \approx 1{,}0554$.
Aangezien ze met hetzelfde bedrag beginnen zal An na één jaar meer rente ontvangen.

V-6a Maandelijkse toename 0,1%: groeifactor per jaar: $1{,}001^{12} \approx 1{,}012$

b Neem $t = 0$ in 2004, I is het aantal inwoners van de stad op tijdstip t, dan is $I = 13000 \cdot 1{,}012^t$.

bladzijde 36

1a 12.00 uur betekent $t = 2$, dus toen waren er $100 \cdot 2^2 = 400$ bacteriën.
10.00 uur was $t = 0$, toen waren er 100, het begingetal.

b Aangezien de groeifactor per uur 2 is, moet je als t met één eenheid toeneemt met 2 vermenigvuldigen. Bij terug in de tijd rekenen moet je natuurlijk delen door 2.
Om 10.00 uur waren er 100 bacteriën, om 9.00 uur, dus één tijdseenheid eerder, waren er 50.

c 8.00 uur is twee tijdseenheden voor 10.00 uur, twee keer delen door 2, dus één keer door 4. Er waren toen 25 bacteriën.

2a 25,4 miljoen

b Het jaar 2003 is het tijdstip $t = 0$, dus toen waren er 25,4 miljoen berichtjes, het begingetal. Invullen in de formule geeft $A = 25,4 \cdot 2^0$, dus blijkbaar is $2^0 = 1$.

c In 2002 werden er 25,4 miljoen gedeeld door 2, dus 12,7 miljoen berichten verstuurd.

d Als je de formule gebruikt krijg je $25,4 \cdot t^{-1}$ als dat 12,7 miljoen is (opdracht c) moet $2^{-1} = \frac{1}{2}$.

e

X	Y1
-4	1.5875
-3	3.175
-2	6.35
-1	12.7
0	25.4
1	50.8
2	101.6

Y1=25.4*2^X

f $\frac{1}{4}$

bladzijde 37

3 Stel het aantal insecten is A. Als er 75% insecten per uur afgaan hou je nog 25%, dus $\frac{1}{4}$ van de populatie blijft er per uur over. De groeifactor per uur is $\frac{1}{4}$. Vanaf het moment dat er nog 150 insecten zijn geldt $A = 150 \cdot (\frac{1}{4})^t$; negen uur eerder, dus op $t = -9$, waren er $150 \cdot (\frac{1}{4})^{-9} = 39\ 321\ 600$, dus bijna 40 miljoen insecten.

4a Afname van 17% per uur, dus de groeifactor is 0,83 per uur. $t = 0$ om 1.00 uur 's nachts en het beginpromillage toen was 0,6; er geldt $P = b \cdot g^t$ met $b = 0,6$ en $g = 0,83$.

b Twee uur daarvoor, dus op $t = -2$, was het promillage $P = 0,6 \cdot 0,83^{-2} \approx 0,87$

c Plot $\text{Y1} = 0,6 \cdot 0,83^X$; $\text{Y2} = 0,5$ Venster: $0 \le \text{X} \le 10$; $0 \le \text{Y} \le 1$
Intersect: $\text{X} \approx 0,978$, dus na ongeveer 1 uur mag hij weer gaan rijden, hij had al twee uur niets gedronken. Na drie uur had hij weer mogen gaan rijden.

bladzijde 38

5a De groeifactor per dag is 11; Neem aan dat je begint te tellen vanaf het moment dat er 1000 algen in de bak zitten, dus dat tijdstip is $t = 0$ en de beginhoeveelheid is dan 1000. Het aantal algen na t dagen is N met $N = 1000 \cdot 11^t$

b Op $t = \frac{1}{2}$ geeft de formule $N = 1000 \cdot 11^{\frac{1}{2}} \approx 3316,62$ Er zouden dus op $t = \frac{1}{2}$ zo'n 3317 algen zijn. Op $t = 0$ waren er 1000, een halve dag later dus reeds 3317.

c De groeifactor per halve dag is $\sqrt{11} \approx 3,32$, want één dag is twee halve dagen en $\sqrt{11} \times \sqrt{11} = 11$, de groeifactor per dag.

d De formule was $N = 1000 \cdot 11^t$ met t in dagen, als je $t = \dfrac{1}{24}$ neemt is dat één vierentwintigste van een dag, dus een uur.

6a De groeifactor is 2 per week. Het beginaantal is 500, dus als model krijg je (als N het aantal algen is): $N = 500 \cdot 2^t$, t is de tijd in weken.

b Eén week heeft zeven dagen, dus als de groei factor per dag g is, moet gelden $g^7 = 2 \Rightarrow g \approx 1,104$

c $\frac{1}{7}$

7a Groeifactor per dag: 1,15, dus per halve dag: $1{,}15^{\frac{1}{2}} \approx 1{,}0724$
Denk erom dat je de exponent tussen haakjes invoert!
b Groeifactor per dag 1,15; per uur $1{,}15^{\frac{1}{24}} \approx 1{,}006$!
c Groeifactor per dag 1,15; per 5 uur: $1{,}15^{\frac{5}{24}} \approx 1{,}030$

bladzijde 39

8a In 1990: 14,9 miljoen; in 1980: 14,1 miljoen
Groeifactor per 10 jaar: $\dfrac{14\,900\,000\,000}{14\,100\,000\,000} \approx 1{,}0567$
b Groeifactor per jaar: $\left(\dfrac{14\,900\,000\,000}{14\,100\,000\,000}\right)^{\frac{1}{10}} \approx 1{,}0055$
c In 1988, dus acht jaar na 1980, zou je dus $14{,}1 \times 1{,}0055^8$ miljoen $\approx 14{,}73247498$ miljoen inwoners verwachten. Je kunt ook zeggen: in 1988, dus twee jaar eerder dan 1990, zou je dus $14{,}9 \times 1{,}0055^{-2} \approx 14{,}73744233$ miljoen inwoners verwachten.
Dat klopt ongeveer met de gegeven 14,7 miljoen.
d In 2100, honderd en twintig jaar (12 periodes van 10 jaar) na 1980 verwacht je: $14{,}1 \times 1{,}0567^{12}$ miljoen $\approx 27{,}3299981$ miljoen inwoners, dat is dus nog net geen verdubbeling.

9a Als de rente 0,581% per maand is, is de groeifactor per maand: 1,00581.
b Een jaar is 12 maanden, dus de groeifactor per jaar is $1{,}00581^{12} \approx 1{,}07199$
c Een groeifactor per jaar van 1,07199, of in drie decimalen 1,072, voor je kapitaal betekent een jaarlijkse rente van 7,2%.

10a 0,4% rente per maand betekent een maandelijkse groeifactor van 1,004, dus de jaarlijkse groeifactor is $1{,}004^{12} \approx 1{,}049$ ofwel 4,9% rente per jaar.
b Een afname van 5% per 15 jaar betekent dat de groeifactor per 15 jaar is 0,95. Per 25 jaar is dat $0{,}95^{\frac{25}{15}} \approx 0{,}918$, dus een procentuele afname van $100\% - 91{,}8\% = 8{,}2\%$
c De inflatie groeit met een factor $\dfrac{100 \cdot 45}{100} = 1{,}45$ per jaar, per kwartaal is deze groeifactor $1{,}45^{\frac{1}{4}} \approx 1{,}097$ ofwel 1,097% d.w.z. de inflatie over een kwartaal is ongeveer 9,7%.

11a De groeifactor per vier jaar (van 2 naar 6!) is $\dfrac{2916}{36} = 81$.
b Per jaar: $\left(\dfrac{2916}{36}\right)^{\frac{1}{4}} = 3$.
c Het groeipercentage per jaar is $300\ \% - 100\ \% = 200\ \%$.

12a Het beginaantal is 16000, een afname van 15% per jaar betekent een groeifactor van 0,85 per jaar, dus over vijf jaar zullen er nog $16000 \times 0{,}85^5 \approx 7100$ vogels zijn.
b Een groeifactor van 0,85 per jaar betekent een groeifactor van $0{,}85^{\frac{1}{2}} \approx 0{,}922$ per half jaar, dus de procentuele afname per half jaar is ongeveer 7,8%.
c Groeifactor per twee jaar $0{,}85^2 = 0{,}7225$; procentuele afname: $1 - 0{,}7225 = 0{,}2775$ ofwel 27,75%.

bladzijde 40

13a De groeifactor: $\frac{4}{2}=\frac{8}{4}=\frac{16}{8}=\frac{32}{16}=\frac{64}{32}=2,$ het begingetal 2, de formule: $O=2\cdot 2^{t}=2^{t+1}$

b Na vijf weken gaat de toenemende groei over in afnemende groei, want na vijf weken wordt de groeifactor van week tot week:
$\frac{96}{64}=1,5;\ \frac{112}{96}\approx 1,167;\ \frac{120}{112}\approx 1,07;\ \frac{124}{120}\approx 1,03,$ d.w.z. de groeifactor neemt af, maar blijft nog wel groter dan 1. Er blijft dus nog wel groei.

c Na tien weken zal de grafiek vrijwel constant worden. Uit de grafiek lees je af dat de vijver dus zo'n 130 m^2 zal zijn.

d Volgens de formule: $O=128-2948\cdot 0,5^{7}=112,$ dit klopt met de tabel!

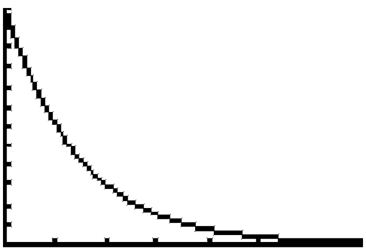
e Plot $\text{Y1}=128-2048\cdot 0,5^{X}$ en $\text{Y2}=127$ Venster: $5\le \text{X}\le 12;\ 0\le \text{Y}\le 140.$
Intersect geeft $X=11$, dus na 11 weken is de bedekte oppervlakte 127 m^2.

f Volgens de formule zal de vijver nooit helemaal bedekt zijn. De bedekte oppervlakte is altijd 128 minus een positief getal, namelijk $128-2048\cdot 0,5^{t}$ en hoe groot t ook is, $2048\cdot 0,5^{t}$ blijft een positief getal en is niet gelijk aan nul.

bladzijde 41

14a Beginhoeveelheid in grammen: 12, groeifactor per drie jaar 0,5; formule: $H=12\cdot 0,5^{t}$
H is de hoeveelheid radioactieve stof in grammen, t de tijd in perioden van 3 jaar.

b Plot $\text{Y1}=12\cdot 0,5^{X}$ Venster: $0\le \text{X}\le 7;\ 0\le \text{Y}\le 12.$

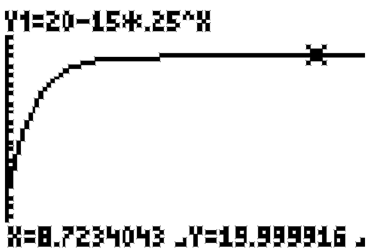


De hoeveelheid radioactieve stof nadert tot nul.

c 0,01% van 12 is 0,0012. Plot $\text{Y1}=12\cdot 0,5^{X}$ en $\text{Y2}=0,0012$. Venster: $10\le \text{X}\le 20;\ 0\le \text{Y}\le 0,01.$
Intersect geeft een snijpunt bij $X\approx 13,3,$ dus na ongeveer 13,3 perioden van drie jaar, zo'n 40 jaar, is er nog 0,01% van de oorspronkelijke hoeveelheid radioactieve stof over.

15a Begintemperatuur: $t=0$ invullen geeft $T=20-15\cdot 0,25^{0}=5$, dus 5 °C.

b Plot $\text{Y1}=20-15\cdot 0,25^{X}$ Venster: $0\le \text{X}\le 10;\ 0\le \text{Y}\le 25.$



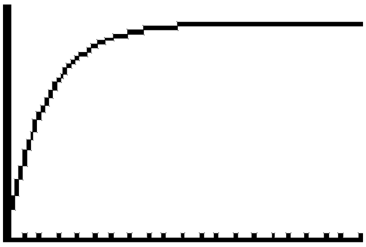
De temperatuur T nadert op den duur tot 20 °C (gebruik TRACE!)

d Deze grafiek heeft de lijn $T = 20$ als asymptoot.

e In de werkelijke situatie wordt de temperatuur echt 20 °C, in het model nadert de temperatuur slechts tot 20 °C.

16a $a = 0$ invullen geeft $N = 60 \cdot (1 - 0{,}64^0) = 0$, dat wil zeggen dat in een gebied met oppervlakte 0 geen diersoorten leven.

b Plot $\text{Y1} = 60 \cdot (1 - 0{,}64^{\text{X}})$ Venster: $0 \le \text{X} \le 20$; $0 \le \text{Y} \le 65$.



De lijn $N = 60$ is asymptoot.

c Er is een bovengrens aan het aantal diersoorten in een gebied; namelijk: hoe groot het gebied ook is, het aantal diersoorten komt niet boven 60.

d In werkelijkheid zullen er meer dan zestig verschillende diersoorten in een groot gebied voorkomen. Denk maar aan de gehele aarde als gebied en de grote hoeveelheid insectensoorten, de formule beschrijft de werkelijkheid dus niet.

e Plot $\text{Y1} = 60(1 - 0{,}64^X)$ en $\text{Y2} = 30$, Venster: $0 \le \text{X} \le 10$; $0 \le \text{Y} \le 65$.
Intersect geeft een snijpunt bij $\text{X} \approx 1{,}55$, dus bij $a \approx 1{,}55$, dat wil zeggen: op ruim anderhalve vierkante kilometer, kun je ongeveer de helft van het maximale aantal diersoorten verwachten.

17a Vul in de formule een groot getal voor *t* in en je vindt dat op den duur de inruilwaarde van een Calypso nog ongeveer 3000 euro is.

b De nieuwwaarde bereken je door $t = 0$ in te vullen in de formules:
Voor de Calypso vindt je een nieuwwaarde van $3000 + 15\,000 \cdot 0{,}8^0 = 18\,000$ euro, voor de Xantippe: $3500 + 28\,000 \cdot 0{,}65^0 = 31\,500$ euro.

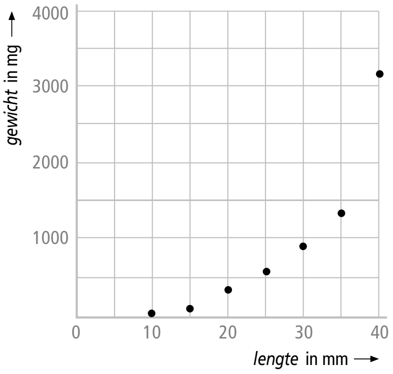
c Op den duur nadert de inruilwaarde van een Xantippe tot 3500 euro.

d Plot $\text{Y1} = 3000 + 15\,000 \cdot 0{,}8^X$ en $\text{Y2} = 3500 + 28\,000 \cdot 0{,}65^X$,
Venster: $0 \le \text{X} \le 20$; $3000 \le \text{Y} \le 31500$.
Intersect geeft een snijpunt bij $X \approx 3{,}36$ en bij $X \approx 14{,}84$ dus na ongeveer 3,36 jaar én na ongeveer 14,84 jaar hebben beide auto's dezelfde inruilwaarde.

e In de plot van de vorige opdracht zie je dat de Xantippe duurder is en in het begin sneller zijn waarde verliest dan de Calypso, maar op den duur toch weer een hogere inruilwaarde houdt.

bladzijde 42

18a



b Er zijn heel kleine én heel grote waarden van het gewicht. Voor de kleine zou je een grotere schaal willen, maar dan kom je niet uit met de grote waarden.

19a $D(1,600)$; $E(2\frac{1}{2},3000)$ en $F(5,200)$.

b H ligt één eenheid hoger dan G, dus de verticale coördinaat is tien maal die van G, dus 150.

bladzijde 43

20a Omdat de waarden nogal uiteenlopen. Een logaritmische schaal geeft dan een duidelijker beeld.

b Het aantal overledenen onder vrouwelijke bejaarden ouder dan 75 jaar was in 1990: 550 (per honderduizend vrouwen) en in 2000 was dat 640, een toename van 90. Voor de groep tussen 40 en 64 jaar was deze toename $110-90=20$, dit is minder, dat wil zeggen dat de groepen niet evenveel zijn toegenomen.

c Uit de data in de vorige opdracht blijkt dat het aantal overleden vrouwen in de groep ‘ouder dan 75’ het meest is toegenomen.

d In 1990 was de sterfte onder vrouwelijke zuigelingen 6,5 per honderddduizend vrouwen. In 1995 was dat 4,9, een afname van 1,6!

21a 1990: 550; 1995: 600 en in 2000: 650

b Groeifactor per 5 jaar: $\frac{600}{550} \approx 1,09$; $\frac{650}{600} \approx 1,08$

c Groeifactor per jaar: ongeveer $1,09^{\frac{1}{5}} \approx 1,02$

d Bij exponentiële toename zou je verwachten: $650 \cdot 1.02^2 \approx 676$; dit is meer dan 647, de exponentiële toename heeft zich dus niet voortgezet.

22a De afstanden zijn steeds ongeveer 1,5 cm, dus even groot.

b

jaar	*aantal rupsen* (× 1000)
1959	3
1960	55
1961	1000
1962	20000
1963	50000
1964	30000
1965	10000
1966	20

c Van 1juli 1962 tot 1 juli 1963, dus in het jaar 1962 is de toename het grootst: $30\,000 \times 1000 = 30$ miljoen.

d

jaar	*aantal rupsen* (× 1000)
1959	3
1960	55
1961	1000
1962	20000

Bij exponentiële toename is de groeifactor per jaar

$\frac{55000}{3000} \approx 18,3$; $\frac{1000000}{55000} \approx 18,2$; $\frac{20000000}{1000000} = 20$, dus gemiddeld ongeveer 18,8.

(of: $\left(\frac{20\,000\,000}{1\,000\,000}\right)^{\frac{1}{3}} \approx 18,8$)

bladzijde 44

23a

verstreken tijd t in minuten	0	5	10	15
watertemperatuur in °C	80	55	38	27

De watertemperatuur neemt niet exponentieel in de tijd af, want de groeifactor per 5 minuten is niet constant, immers: $\frac{55}{80} = 0,6875$; $\frac{38}{55} \approx 0,6909$ en $\frac{27}{38} \approx 0,7105$.

b

verstreken tijd t in minuten	0	5	10	15
verschil watertemperatuur met omgevingstemperatuur T	75	50	33	22

c Noem het temperatuursverschil met de omgeving *T*; deze grootheid neemt wel min of meer exponentieel af, want nu is de groeifactor ongeveer constant:

$\frac{55}{75} \approx 0,67$; $\frac{33}{50} = 0,66$ en $\frac{22}{33} \approx 0,67$.

d Als $T = 5 + 75 \cdot (\frac{2}{3})^t$ de watertemperatuur beschrijft, is *t* gemeten in periodes van vijf minuten, immers: $T - 5$ is het temperatuurverschil met de omgeving; er geldt $T - 5 = 75 \cdot (\frac{2}{3})^t$ per vijf minuten was de groeifactor ongeveer $0,67$ en dit is ongeveer $\frac{2}{3}$.

e Voor $t = 2$: $T = 5 + 75 \cdot (\frac{2}{3})^2 \approx 38,3$; voor $t = 3$: $T = 5 + 75 \cdot (\frac{2}{3})^2 \approx 27,2$; Dat klopt aardig met de waarnemingen.

f Op den duur zal de temperatuur van het water 5°C worden, in de formule zie je dat de term $75 \cdot (\frac{2}{3})^t$ naar 0 gaat als *t* groter wordt.

24a

jaar	1900	1920
aantal inwoners	21500	49000

$\frac{49000}{21500} \approx 2,28$ is de groeifactor per 20 jaar ongeveer, per 10 jaar is de groeifactor bij exponentiële groei dan ongeveer $\sqrt{2,28} \approx 1,51$, dat wil zeggen dat de bevolkingstoename ongeveer 0,51, dus zo'n 51% per tien jaar is.

b

jaartal	1930	1940	1950	1960
aantal inwoners van Amsterdam	790 000	800 000	850 000	900 000
aantal inwoners van Rotterdam	640 000	650 000	700 000	750 000

Het verschil is telkens 150 000 en is dus gelijk gebleven.

c In 1900: 110 000 inwoners; in 1970: 260 000 inwoners,
Groeifactor per 70 jaar: $\frac{260\,000}{110\,000}$; per jaar dus $\left(\frac{260\,000}{110\,000}\right)^{\frac{1}{70}} \approx 1{,}012$, dat wil zeggen dat er per jaar een fractie 0,012 bijkomt, dus ongeveer 1,2%.

d Verdubbeling wil zeggen dat $1{,}012^t = 2$.
Plot $\mathrm{Y1} = 1{,}012^X$ en $\mathrm{Y2} = 2$, Venster: $0 \le \mathrm{X} \le 10$; $0 \le \mathrm{Y} \le 65$.
Intersect geeft een snijpunt bij $X \approx 58{,}1$, dus in ongeveer 58 jaar verdubbelt de bevolking van Utrecht zich als je uitgaat van exponentiële groei.
Volgens de grafiek waren er 120 000 inwoners in 1900 en 58 jaar later waren er ongeveer 250 000, dat is dus inderdaad ongeveer een verdubbeling.

e Bij een groeipercentage van 100 per 10 jaar is de groeifactor per 10 jaar 2, dus per 20 jaar 4 en dan is het groeipercentage in 20 jaar 300.

f Bij een groeipercentage van 200 per 10 jaar is de groeifactor per 10 jaar 3 dus per 20 jaar 9 en het groeipercentage per 20 jaar is dus 800.

bladzijde 45

25a Herder: $\frac{13000}{80}$ Bq/kg $= 162{,}5$ Bq/kg ; rendier 700 Bq/kg; verhouding
$162{,}5 : 700 \approx 1 : 4{,}31$

b In 1965:
Herder: $\frac{45000}{80}$ Bq/kg $= 562{,}5$ Bq/kg ; rendier ongeveer 2800 Bq/kg (aflezen!)
Verhouding: $562{,}5 : 28000 \approx 1 : 4{,}98$

c Aflezen voor de herders:

jaartal	1965	1970	1975	1977
aantal Bq	45 000	17 000	8000	6000

Bij exponentiële afname zou de groeifactor per jaar $\left(\frac{6000}{45\,000}\right)^{\frac{1}{12}}$ zijn.

In dat geval zou je (uitgaande van 45 000 Bq in 1965) in 1970:

$$45000 \times \left(\frac{6000}{45\,000}\right)^{\frac{5}{12}} \approx 19\,436$$

en in 1975: $45000 \times \left(\frac{6000}{45000}\right)^{\frac{10}{12}} \approx 8394$ verwachten.

Dat klopt aardig met de waarnemingen, dus de exponentiële afname klopt ook wel.

d Aflezen voor de rendieren:

jaartal	1965	1970	1975	1977
aantal Bq/kg	2800	1800	800	700

De groeifactor per jaar (bij exponentiële afname):

$$\left(\frac{1800}{2800}\right)^{\frac{1}{5}} \approx \left(\frac{800}{1800}\right)^{\frac{1}{5}} \approx \left(\frac{700}{800}\right)^{\frac{1}{2}} \approx 0{,}9\ ;$$

Voor herders was dit $\left(\frac{6000}{45\,000}\right)^{\frac{1}{12}} \approx 0{,}85$.

De daling bij herders en bij rendieren was dus niet even groot.

e Als de afbraak op de exponentiële manier was doorgegaan, was er in 1987 nog $45\,000 \times \left(\frac{6000}{45\,000}\right)^{\frac{22}{12}}$ Bq ≈ 1120 Bq aan straling geweest.

f Na de ramp in Tsjernobyl:

jaartal	1988	1990
aantal Bq/kg	9000	8000

Ga weer uit van exponentiële afname met groeifactor $\left(\frac{8000}{9000}\right)^{\frac{1}{2}} \approx 0{,}94$ per jaar.
Plot $\text{Y1} = 9000 \cdot 0{,}94^{X}$ en $\text{Y2} = 1120$, Venster: $0 \le X \le 20$; $0 \le Y \le 9000$.
Intersect geeft een snijpunt bij $X \approx 33{,}6$ dus ruim 33 jaar na 1986, in het jaar 2019 zal de hoeveelheid ongeveer die van opdracht e zijn.

bladzijde 46

I-1a Klik ‘begingroei’ aan. Met de schuifparameter zie je dat groeifactor 2 goed past.
b Schuifparameter ongeveer bij 128
c Ongeveer in week 11.
d Ongeveer na 13 of 14 weken.

I-2a Schuifparameter bij 0,5.
b Na 13 maanden (aflezen !) : 80 g; na 24 maanden is er nog 27 g.
c De hoeveelheid radioactiviteit wordt steeds gehalveerd, wordt dus wel klein, maar verdwijnt niet geheel.

I-3 Bij grafiek A is de lijn $Aantal = 80$ asymptoot, bij grafiek B de lijn $Aantal = 10$ en bij grafiek C de lijn $Aantal = 30$.

I-4a Lees af: begintemperatuur glas A: 5 °C, de grafiek begint op $t = 0$ in het punt $(0,5)$.
Op dezelfde manier zou je voor grafiek B te werk willen gaan, maar daar kun je het beginpunt niet aflezen. Maar je kunt in de formule van grafiek B wel $t = 0$ invullen, je vindt dan als begintemperatuur $20\ ^{\circ}\text{C} + 55\ ^{\circ}\text{C} = 75\ ^{\circ}\text{C}$.
b Op den duur 20°C .
c Voor grote waarden van *t* nadert de grafiek tot de lijn $Temp = 20$, dat zie je met ‘trace’. In de formules: $Temp = 20 - 15 \times 0{,}5^{tijd}$ (grafiek A) en $Temp = 20 + 55 \times 0{,}7^{tijd}$ (grafiek B) zie je dat je krijgt $20 \pm$ iets dat tot nul nadert voor grote waarden van *t*.

I-5a De grafiek heeft kennelijk als asymptoot de lijn $N = 60$.
b Er zullen volgens dit model niet meer dan 60 verschillende diersoorten in een gebied, hoe groot ook, voorkomen.
c Bij gebieden van ongeveer 1,6 m^2 kun je zo’n 30 verschillende diersoorten verwachten.
d Als je in de formule de haakjes weg werkt:
$N = 60(1 - parameter^{a}) = 60 - 60 \times parameter^{a}$ zie je dat als je waarden voor de parameter kiest die positief, maar kleiner dan 1 zijn, je voor grote *a* krijgt $60 -$ iets dat naar nul gaat.

bladzijde 47

I-6a Via de 'trace'-functie (versleep de grafiek, zodat je verder naar rechts kunt) zie je dat de inruilwaarde op den duur 3000 euro wordt.

b De nieuwwaarde van beide auto's vind je in de grafiek op de *y*-as, uit de formule door $t = 0$ in te vullen. De Xantippe heeft als nieuwwaarde 31500 euro en de Calypso 18000 euro.

c Ongeveer 3500 euro (Zie opdracht a!)

d Lees af dat beide auto's na ongeveer 3,5 jaar én na ongeveer15 jaar dezelfde inruilwaarde hebben. Preciezer: Plot $\mathrm{Y1} = 3000 + 15000 \cdot 0,8^X$ en $\mathrm{Y2} = 3500 + 28000 \cdot 0,65^X$, Venster: $0 \le \mathrm{X} \le 20$; $0 \le \mathrm{Y} \le 31500$.
Intersect geeft snijpunten bij $\mathrm{X} \approx 3,358$ en $\mathrm{X} \approx 14,84$, dus na ongeveer 3,4 jaar en na ongeveer 14,8 jaar hebben ze dezelfde inruilwaarde.

e De Xantippe heeft een hogere aanschafprijs, verliest in eerste instantie sneller zijn waarde, maar behoudt dan toch op den duur een hogere inruilwaarde dan de Calypso.

I-7a De vermenigvuldigingsfactor per jaar is achtereenvolgens
$\frac{15}{6} = 2,5$; $\sqrt{\frac{38}{15}} \approx 1,6$; $\frac{48}{38} \approx 1,3$; $\frac{59}{48}1,2$; $\frac{71}{59} \approx 1,2$, er is dus geen sprake van exponentiële groei.

b Het lijkt lineaire groei.

c $p = 9,69t - 19\,247$

d *c* moet ongeveer 28,81 zijn.

e Door de grafiek te verslepen zie je dat na $t = 2000$ maar vóór $t = 2001$ de grens van 90% werd bereikt, dus in het jaar 2000.

f Omdat het over een percentage gaat, kan 100 wel worden benaderd, maar niet overschreden.

g In de jaren na 1994 kun je gebruiken $A = 100 - 28,81 \cdot 0,85^{t-1994}$; dat was gegeven. En in opdracht d heb je de 28,81 bepaalt. In 2004 begint er weer een ander model, met beginwaarde $100 - 28,81 \cdot 0,85^{2004-1994} \approx 94,33$ en factor 0,76 (24% per jaar daling!). Dus in 2005 moet je 71,69 hebben en in 2006: 54,49. Na enig schuiven met de schuifparameters *b* en *g* vind je $b \approx 94,08$ en $g \approx 0,765$.

bladzijde 50

T-1a Toename met 30% per half jaar: groeifactor per half jaar $1 + 0,3 = 1,3$ en de groeifactor per jaar is dan $1,3^2 = 1,69$.

b Het beginaantal was 250; de groeifactor 1,69; na *t* jaar zijn er $A = 250 \cdot 1,69^t$.
Hierin is *A* het aantal ratten en is *t* de tijd in jaren, $t = 0$ op 1 januari 2006.

c Op 1 januari 2005 waren er volgens dit model $250 \cdot 1,69^{-1} \approx 148$, dus al meer dan 100.

d Op 1 januari 2003 ($t = -3$) waren er volgens dit model $250 \cdot 1,69^{-3} \approx 52$

T-2a Toename met 25% per 8 jaar, dus de groeifactor per 8 jaar is 1,25.

b Groeifactor per 8 jaar 1,25, dus per jaar $(1,25)^{\frac{1}{8}} \approx 1,0283$, dus per jaar neemt de bevolkingsgrootte met ongeveer 2,83% toe.

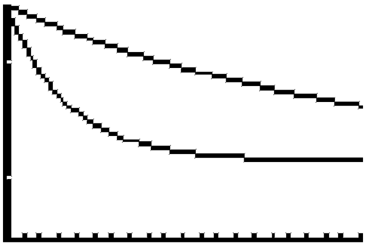
c Beginaantal: 52 684, groeifactor per jaar 1,028; $A = 52\,684 \cdot 1{,}0283^t$, waarbij A het aantal mensen op het eiland is, t de tijd in jaren vanaf $t = 0$ in 1941.

d In 1936 is $t = -5$, toen waren er volgens de formule in opdracht c: $52\,684 \cdot 1{,}0283^{-5} \approx 45\,823$ dus bijna 46 000 eilandbewoners.

T-3a De kamertemperatuur is kennelijk 20 °C. Er geldt $C - 20 = 40 \cdot 0{,}75^t$, dus het verschil tussen C en de kamertemperatuur neemt met factor 0,75 per minuut af, dat betekent dat er per minuut 25% afgaat.

b De waarde van S op $t = 0$ is: $20 + 40 \cdot 0{,}95^0 = 20 + 40 \times 1 = 60$

c Plot $\text{Y1} = 20 + 40 \cdot 0{,}754^X$ en $\text{Y2} = 20 + 40 \cdot 0{,}954^X$; Venster: $0 \le \text{X} \le 20;\ 0 \le \text{Y} \le 60$.



De asymptoot, de lijn $C = 20$ of $S = 20$ is de grafiek van de kamertemperatuur, zowel de chocolademelk als de soep koelen af en nemen uiteindelijk de omgevingstemperatuur aan.

d Zowel C als S hebben volgens hun formule de waarde $20 +$ een getal dat naar nul gaat voor groter wordende t.

T-4a $10^{2\frac{1}{2}}$

b $10^{2\frac{1}{2}} = 316{,}2277..... \approx 316$

c $10^{3\frac{1}{3}} \approx 2154$

d $10^{2\frac{3}{4}} \approx 562$

e $f - e = 10^{1\frac{3}{4}} - 10^{1\frac{1}{2}} \approx 56{,}23 - 31{,}62 \approx 24{,}6$ en $e - d = 10^{1\frac{1}{2}} - 10^{1\frac{1}{4}} \approx 31{,}62 - 17{,}78 \approx 13{,}5$

f Nee

bladzijde 51

T-5a In de eerste 10 halve uren neemt de populatie toe van 100 tot 100 000, dat is een groeifactor van 1000. Per uur is dat dan $\left(10^3\right)^{\frac{1}{5}} \approx 3{,}98$, want 10 halve uren is vijf hele uren.

b De populatie groeit het snelst als er al veel bacteriën zijn. Dus in het twintigste halve uur zal het aantal het sterkst zijn toegenomen.

c Na 10 halve uren, dus na vijf uur is het aantal bacteriën $10^5 = 100\,000$ of meer per ml en kun je er dus ziek van worden.

d Dit evenwicht duurt van $t = 10$ tot $t = 35$, dus 15 halve uren ofwel 7,5 uur

e Plot $\text{Y1} = 10^8 \cdot 0{,}5^{\text{X}}$ en $\text{Y2} = 100$; venster: $0 \le \text{X} \le 30;\ 0 \le \text{Y} \le 200$.
Intersect geeft een snijpunt bij $\text{X} \approx 19{,}93$, dus ongeveer 20 kwartieren, dat wil zeggen ongeveer 5 uur nadat het afstervingsproces is begonnen is de concentratie bacteriën weer 100 per ml.

T-6a Neem $t = 0$ in 1900 en t in tientallen jaren. De beginhoeveelheid is dan zes miljoen m^3 per jaar en de groeifactor 1,4. Een formule voor het waterverbruik W per jaar in miljoenen m^3 is dan: $W = 6 \cdot 1{,}4^t$.

b De vraag is of $1{,}4^2 \geq 2$? Antwoord: Nee, want $1{,}4^2 = 1{,}96$.

c In 2010 is $t = 11$. Als er niets verandert is het watergebruik dan $W = 6 \cdot 1{,}4^{11} \approx 243$, dus ongeveer 243 miljoen m^3.

d Plot $\text{Y1} = 6 \cdot 1{,}4^{\text{X}}$ en $\text{Y2} = 700$; venster: $0 \leq \text{X} \leq 20$; $0 \leq \text{Y} \leq 1000$.
Intersect geeft een snijpunt bij $\text{X} \approx 14{,}14$, dus ongeveer $14{,}14 \times 10 = 141{,}4$ jaren na 1900, dat wil zeggen in 2041, zal het watergebruik de grens van 700 miljoen m^3 passeren.

T-7a Halveren in 30 jaar wil zeggen dat de groeifactor per 30 jaar gelijk is aan 0,5. Per jaar is dat $0{,}5^{\frac{1}{30}} \approx 0{,}977$.

b 25% verdwenen betekent nog 75% over; de vraag is dus 'Wanneer is $0{,}977^t = 0{,}75$?
Plot $\text{Y1} = 0{,}977^X$ en $\text{Y2} = 0{,}75$; venster: $0 \leq \text{X} \leq 20$; $0 \leq \text{Y} \leq 1$.
Intersect geeft een snijpunt bij $X \approx 12{,}36$, dus na 12 jaar en ruim 4 maanden (0,36 jaar komt overeen met $0{,}36 \times 12 = 4{,}32$ maanden) ofwel na zo'n 148 maanden is er 25% van de stralingsintensiteit verdwenen.

c Plot net als in de vorige opdracht $\text{Y1} = 0{,}977^X$ Neem ook $\text{Y2} = 0{,}001$ en $\text{Y3} = 0{,}002$; venster: $250 \leq \text{X} \leq 300$; $0 \leq \text{Y} \leq 0{,}003$.
Intersect geeft een snijpunt bij van Y1 en Y2 bij $\text{X} \approx 297$ en een snijpunt van Y1 met Y3 bij $\text{X} \approx 267$, dus deze potscherven zullen tussen de 250 en 300 jaar oud zijn.